Exponentielles Wachstum

Große Aufgabensammlung

Neu zusammengestellt

Auch mit CAS-Einsatz

Stand: 25. April 2023

Datei – Nr. 45811

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Diese große Aufgabensammlung enthält auch Aufgaben des exponentiellen Wachstums aus Klassenstufe 10. Diese stehen teilweise schon in den Texten 18110 ff.
Sie wurde hier der Vollständigkeit halber aufgenommen.

Für andere Wachstumsmodelle (begrenztes, logistisches und vergiftetes Wachstum) gibt es weitere Texte. Siehe Menü!

Wachstumsaufgaben

Die Lösungen der folgenden Aufgaben befinden sich im Text 18815
Aufgaben 1 bis 15, 31 bis 45 und 51 bis 55

Aufgabe 1

Eine Bakterienpopulation vergrößert sich nach jeweils einer Minute um 50 Prozent.
Die Menge zur Zeit t = 0 sei n(0) = 20. Stelle die Gleichung der Wachstumsfolge auf.

Aufgabe 2

Eine Bakterienkultur umfasst anfangs 50 000 Bakterien. Die Anzahl vergrößert sich alle 20 Minuten um 20 %. Wie viele Bakterien sind es nach 3 Stunden? Nach welcher Zeit sind es 10 Millionen Bakterien?

Aufgabe 3

In einer Bakterienkultur sind zu Beginn einer Beobachtung 6000 Bakterien vorhanden.
Es ist bekannt, dass sich bei diesen Bakterien die Anzahl in 5 Stunden verdreifacht.

a) Zeige, dass dieses Wachstum durch die Gleichung $m(t) = 6.000 \cdot 3^{0,2 \cdot t}$ beschrieben wird.

b) Berechne die Anzahl der Bakterien 3 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

c) In wie viel Stunden verzehnfacht sich die Anzahl der Bakterien?

Aufgabe 4

Ein Bakterienstamm hat nach 1 Stunde 100 Individuen und nach 1 Tag 40 000.

a) Stelle die zugehörige Wachstumsfolge auf. Interpretiere diese Gleichung!

b) Wie viele sind nach 3 Stunden vorhanden?

c) In welcher Zeitspanne verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien?

d) In welcher Zeitspanne erhält man das 8-fache bzw. 32-fache einer Menge?

e) Wann sind mehr als 10 000 Bakterien vorhanden?

Aufgabe 5

Ein Bakterienstamm verdreifacht sich in 5 Stunden und hat nach zwei Stunden 150 Individuen.
Welche Wachstumsgleichung liegt vor?

Aufgabe 6

Von einem Bakterienstamm ist bekannt, dass sich die Zahl seiner Individuen in 35 Minuten verdoppelt. Zum Zeitpunkt 0, dem Beginn der Beobachtungsreihe, schätzte man den Bestand auf etwa 80 Bakterien. Wie lautet die Wachstumsgleichung?

Aufgabe 7 (Wichtige Aufgabe mit superausführlicher Lösung)

Vom Wachstum einer Bakterienkultur liegt eine Tabelle vor.

t (in min)	0	5	10	15	20	25	30
n(t)	24	31	39	50	64	81	104

a) Untersuche die Art des Wachstums und stelle die Wachstumsgleichung auf.

b) Berechne die Wachstumsraten zu den 6 Intervallen und zeige die Proportionalität zu n(t).

Aufgabe 8 Bakterienkulturen

Eine Bakterienkultur A vermehrt sich exponentiell, und zwar stündlich um 8 %.

a) Nach wie vielen Stunden hat sich eine beliebige Menge verdreifacht?

b) Mittags um 12 Uhr wurden 50 Exemplare bereitgestellt.
Wie viele kann man um 18 Uhr desselben Tages erwarten?

Eine zweite Bakterienkultur B wird zu Versuchszwecken Bedingungen ausgesetzt, in der sie exponentiell absterben. Man nahm um 12 Uhr eine Ausgangsmenge von 200 Bakterien und zählte um 16 Uhr noch 150 Exemplare.

c) Berechne die Halbwertszeit dieses Bakteriensterbens.

d) Um wie viel Uhr leben von Stamm A und von Stamm B gleich viele Exemplare?

Aufgabe 9

Ein Bakterienstamm stirbt wegen einer Vergiftung ab.
Die Population gehorcht dabei modellhaft etwa der (Folgen-)Gleichung $n(t) = 240 \cdot 0{,}8^t$.

a) Erkläre die Bedeutung dieser Gleichung, wenn t in Minuten gemessen wird.

b) Nach welcher Zeitspanne ist nur noch die Hälfte vorhanden?

c) Wann ist die Population ausgestorben?

Aufgabe 10 Auch Pflanzen wachsen (Lösungen ab Seite 28)

Das Wachstum einer Pflanze soll untersucht werden. Man beginnt mit der Beobachtung einer jungen, kleinen Pflanze und erhält diese Messwerte:

t in Tagen	0	20	40	60	80
g(t) in cm	30	33,5	38	42	47,5

a) Zeige, dass näherungsweise ein exponentielles Wachstum vorliegt.
Berechne dann rekursiv die Größen g(100), g(120), g(140) und g(160).

b) Stelle aus zwei Wertepaaren der Tabelle die explizite Größenfunktion g(t) auf.
Kontrolliere damit die drei anderen Werte der Tabelle

c) Stelle mit Hilfe **exponentieller Regression** eine „mittlere“ Wachstumsfunktion für g auf.

Aufgabe 11

Ein Distrikt eines Entwicklungslandes hatte Ende 1988 rund 120 000 Einwohner.

Die Bevölkerungszahl nimmt laut Statistik jährlich um 2,5 % zu.

a) Wie viele Einwohner wird dieser Distrikt Ende 2000 voraussichtlich haben?

b) Die Wirtschaft dieses Distrikts konnte zum Jahresende 1988 nur 80 000 Menschen ernähren. Ein Entwicklungsprogramm soll bis zum Ende des Jahres 2000 die landwirtschaftlichen Produkte um insgesamt 70% erhöhen. Wie viele Menschen sind demnach rechnerisch im Jahre 2000 noch auf eine Nahrungsmitteleinfuhr angewiesen?

c) In welchem Jahr könnte dieser Distrikt alle seine Bewohner selbst ernähren, wenn die für das Jahr 2000 errechnete Lebensmittelproduktion von da an jährlich um 4 % steigt?

Aufgabe 12

Das kleine Fürstentum Binaco hatte 1960 gerade 870 000 Einwohner. 1980 waren es schon 1 Million Einwohner.

a) Um wie viel Prozent vergrößert sich die Einwohnerzahl jedes Jahr, wenn die jährliche prozentuale Zunahme stets gleich bleibt?

b) In welchem Zeitabschnitt verdoppelt sich die Einwohnerzahl?

c) Das noch kleinere Fürstentum Minaco hatte 1960 gerade 426 800 Einwohner. Die gleich bleibende jährliche Wachstumsrate beträgt hier 15 %. In welchem Jahr werden die beiden Fürstentümer gleich viele Einwohner haben?

Aufgabe 13

Waldbestände wachsen näherungsweise exponentiell an.

a) Der Bestand, in dem 10 Jahre kein Holz geschlagen worden ist, wuchs während dieser Zeit von 50 000 fm auf 70 530 fm an. Wie viel Prozent betrug die jährliche Zuwachsrate? In welcher Zeit verdreifacht sich dieser Bestand? (fm = Festmeter)

b) In einem anderen Waldstück ist die jährliche Zuwachsrate 3 %. Es wurden im Jahr 1980 rund 15 000 fm geschlagen. Der Förster schätzt, dass 1990 der Holzbestand wieder so groß sein wird wie 1980 vor dem Einschlag. In welchem Jahr wird der Bestand auf rund 66 000 fm angewachsen sein?

Aufgabe 14

Weltweit wurden 1990 rund 8 Mill. Tonnen Kupfer verbraucht. Der Kupferverbrauch steigt jährlich um 2,8 %.

a) Bestimme den jährlichen Verbrauch V (in Millionen Tonnen) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren nach 1990) .

b) Anfang 1990 wurden die Kupferreserven weltweit auf 350 Millionen Tonnen geschätzt. Stelle in einer Tabelle den jährlichen Verbrauch und die jeweiligen Kupferreserven bis Ende 1993 zusammen.

c) Berechne die Zeit, innerhalb derer sich der jährliche Verbrauch V bei gleich bleibender Steigerungsrate vervierfachen würde.

Aufgabe 15

Die Funktion f mit $f(t) = 120 \cdot 1{,}08^t$ beschreibt einen Wachstumsvorgang. t sei die Zeit in Jahren.

a) Berechne die Anfangsmenge (die also zur Zeit t = 0 vorhanden ist) sowie die nach t = 10 Jahren und t = 25 Jahren. Runde auf 2 Dezimalen.

b) In welcher Zeitspanne Δt hat sich eine beliebige Menge f(t) verdoppelt?

c) Um wie viel Prozent vermehrt sich f(t) in 1 Jahr?

d) Zeige, dass dieses Wachstum die Fähigkeit hat, sich in jeweils n Jahren um denselben Faktor q zu vervielfachen. Berechne ihn.

e) Nach welcher Zeit hat das Wachstum die Größe f(t) = 200 erreicht?

Wachstumsraten und Differentialgleichung

Aufgabe 20

(Lösung auf Seite 15)

Berechne aus der momentanen Wachstumsrate die Bestandsfunktion.

a) $R(t) = 1{,}584 \cdot e^{0{,}0198 \cdot t}$ mit $B(0) = 80$ bzw. mit $B(0) = 40$

b) $R(t) = 28 \cdot 1{,}04^t$ mit $B(10) = 50$

c) $R(t) = 400 \cdot e^{0{,}25 \cdot t}$ mit $B(0) = 200$

d) $R(t) = 24 \cdot 0{,}87^t$ mit $B(2) = 20$

e) $R(t) = 2500 \cdot e^{-t/2}$ mit $B(20) = 1$

Aufgabe 21

(Lösung auf Seite 16)

Erstelle zu einer Bestandsfunktion eine Differentialgleichung.

a) $B(t) \cdot 20 \cdot e^{0{,}2 \cdot t}$ b) $B(t) = 50 \cdot 1{,}05^t$ c) $m(t) = 10{,}5 \cdot 0{,}92^t$

d) $B(t) = 180 \cdot 0{,}98^t$ e) $m(t) = 20 \cdot 1{,}08^t$ f) $f(x) = 24 \cdot 5^x$

Aufgabe 22

(Lösung auf Seite 17)

Bestätige die Lösung der **Differentialgleichung** durch eine Probe.

a) $B(t) = 45 \cdot 1{,}2^t$ und $B'(t) = 0{,}1823 \cdot B(t)$

b) $m(t) = 42 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$ und $m'(t) = -\frac{1}{2} \cdot m(t)$

c) $B(t) = 144 \cdot 1{,}5^t$ und $B'(t) = 0{,}4055 \cdot B(t)$

d) $m(t) = 68 \cdot e^{1{,}4918 \cdot t}$ und $m'(t) = 1{,}4918 \cdot m(t)$

e) $f(x) = 200 \cdot e^{-2x}$ und $f'(x) = -2 \cdot f(x)$

f) $y = 12 \cdot 0{,}8^t$ und $y' = -0{,}233 \cdot y$

Aufgabe 23

Löse die **Differentialgleichungen**

(Lösung auf Seite 19)

a) $B'(t) = 0{,}1823 \cdot B(t)$ mit $B(0) = 50$

b) $m'(t) = -0{,}25 \cdot m(t)$ mit $m(0) = 25$

c) $B'(t) = 0{,}45 \cdot B(t)$

d) $m'(t) = 2 \cdot m(t)$

e) $f'(x) = -0{,}9 \cdot f(x)$

Aufgabe 25 Wachstumsraten

(Lösung auf Seite 21)

Die Wachstumsfunktion $B(t) = 80 \cdot 1{,}02^t$ ist gegeben.

a) In welcher Zeitspanne verdoppelt sich der Bestand?

b) Berechne die mittleren Wachstumsraten für die Zeitspannen $[35\,;70]$ und $[70\,;105]$.

c) Berechne die momentanen Wachstumsraten zu t = 35, t = 70 und t = 105.

d) In jedem der beiden Zeitintervalle von $[35\,;70]$ und $[70\,;105]$ gibt es einen Zeitpunkt, in dem die momentane Änderungsrate gleich groß ist wie die mittlere Wachstumsrate des jeweiligen Intervalls.

Aufgabe 26 Wachstumsraten

(Lösung auf Seite 22)

Eine Pflanze beginnt ihr Wachstum exponentiell. Man hat herausgefunden, dass die Funktion $g(t) = 30{,}05 \cdot 1{,}00564^t$ recht gut das anfängliche Wachstum beschreibt. (t in Tagen, g in cm)

a) Berechne dazu die folgenden für Werte:

t in Tagen	0	20	40	60	80
g(t) in cm					

b) Wie groß sind die durchschnittlichen Wachstumsraten für die Zeitintervalle $[0\,;20]$, $[20\,;40]$, $[40\,;60]$ und $[60\,;80]$?
Beschreibe mit Worten, was diese mittleren Wachstumsraten bedeuten und in welcher Beziehung sie zur mittleren Wachstumsrate in $[0\,;80]$ stehen.

c) Berechne die **momentane Wachstumsrate** als Funktion $R(t)$ und speziell für die Zeitpunkte 0 min, 40 min und 80 min. Beschreibe die Bedeutung von $R(40)$.

d) Zeige: Es gibt genau einen Zeitpunkt t* im Innern des Intervalls, in dem die momentane Wachstumsrate denselben Wert hat wie die mittlere Wachstumsrate über das Intervall $[0\,;80]$.
Berechne t*.

e) Stelle die Gleichung der **Tangentenfunktion** T(t) an der Stelle t = 40 auf.
Diese Funktion ist als lineare Funktion viel einfacher zu behandeln als die wirkliche Wachstumsfunktion g(t), die ja eine Exponentialfunktion ist.
Berechne die Abweichung der Funktionswerte $|g(t) - T(t)|$ für die Stellen t = 50, 60, 30 und 40.
Wie viel Prozent sind dies, bezogen auf die g-Werte?
Interpretiere das Ergebnis.

Exponentielle Abnahme

Radioaktiver Zerfall

Der Zerfall von Atomen eines radioaktiven Elements in andere Atomsorten stellt einen exponentiellen Zerfallsvorgang dar. In einer bestimmten Zeit zerfällt jeweils ein bestimmter Prozentsatz des vorhandenen Materials, wobei nicht vorhersagbar ist, welches Element zerfällt. Es handelt sich also um einen zufälligen Prozess, bei dem die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist spiel kommt.
Alle berechenbaren Größen sind Mittelwerte bzw. Erwartungswerte, die über viele Experimente hinweg ihre Richtigkeit bekommen. Man kann also den Zerfall einer Menge radioaktiven Materials durch exponentielle Zerfallsfunktionen modellhaft darstellen: $m(t) = m(0) \cdot q^t$
Man kann hier das Modell des stetigen Zerfalls anwenden und mit Funktionen statt mit Zahlenfolgen arbeiten, denn man kann dann zu jedem Zeitpunkt den berechneten Wert angeben.
Als Kennzeichen für die Geschwindigkeit des Zerfalls hat es sich eingebürgert, die Zeit, in der eine exponentiell abnehmende Menge auf die Hälfte reduziert worden ist, die so genannte ***Halbwertszeit*** *anzugeben. Kennt man das Zerfallsgesetzt, lässt sie sich leicht berechnen.*

Aufgabe 31:

(Lösungen Aufgaben 31 bis 42 in Text 18815)

Berechne eine Formel für die Halbwertszeit eines radioaktiven Präparats.

Zeige, dass sie sowohl von der Ausgangsmenge m(0) wie auch vom Zeitpunkt t der Beobachtung unabhängig ist.

Aufgabe 32

a) **Radioaktive Stoffe** zerfallen nach dem Gesetz $N(t) = N(0) \cdot a^t$.
Für radioaktives Jod gilt a = 0,917. Wie viel mg sind von 3 g dieses Jods nach 45 Tagen noch vorhanden? Bestimme die Halbwertszeit von radioaktivem Jod.

b) Das Element Radon zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,8 Tagen.
Nach welcher Zeit ist noch $^1/_8$ der Ausgangsmenge Radon vorhanden?
Stelle die Gleichung der Zerfallsfunktion auf.
Nach welcher Zeit sind es noch 10 % der Ausgangsmenge?

c) Thorium zerfällt nach dem Gesetz $N(t) = N(0) \cdot 0{,}963^t$.
Ein Stoff enthält 10 mg Thorium und 15 mg radioaktives Jod.
Nach welcher Zeit sind von beiden Stoffen noch gleiche Mengen vorhanden?

Aufgabe 33

Ein radioaktives Element zerfällt innerhalb von 24 Sekunden von 10,5 g auf 6,5 g.

a) Stelle das Zerfallsgesetz auf und interpretiere es.
b) Berechne die Halbwertszeit.
c) In welcher Zeitspanne zerfällt dieses Element auf ein Achtel?
d) Wie viel ist nach 10 Minuten übrig?
e) Wann ist weniger als 1 mg übrig?

f) Berechne die **momentane Zerfallsrate** allgemein und zum Zeitpunkt t = 1 min.
(für die Oberstufe)

Aufgabe 34 Berechnung der Zerfallsgleichung aus der Halbwertszeit

Eine radioaktive Substanz hat die Halbwertszeit 4,5 min. Berechne ihre Zerfallsfunktion, wenn man weiß, dass nach 3 Minuten noch 45 mg vorhanden sind.

Aufgabe 41 Bakterienkulturen

Eine Bakterienkultur A vermehrt sich exponentiell, und zwar stündlich um 8 %.

a) Nach wie vielen Stunden hat sich eine beliebige Menge verdreifacht?

b) Mittags um 12 Uhr wurden 50 Exemplare bereitgestellt.
Wie viele kann man um 18 Uhr desselben Tages erwarten?

Eine zweite Bakterienkultur B wird zu Versuchszwecken Bedingungen ausgesetzt, in der sie exponentiell absterben. Man nahm um 12 Uhr eine Ausgangsmenge von 200 Bakterien und zählte um 16 Uhr noch 150 Exemplare.

c) Berechne die Halbwertszeit dieses Bakteriensterbens.

d) Um wie viel Uhr leben von Stamm A und von Stamm B gleich viele Exemplare?

Aufgabe 42

Ein Bakterienstamm stirbt wegen einer Vergiftung ab.
Die Population gehorcht dabei modellhaft etwa der (Folgen-)Gleichung $n(t) = 240 \cdot 0{,}8^t$.

a) Erkläre die Bedeutung dieser Gleichung, wenn t in Minuten gemessen wird.

b) Nach welcher Zeitspanne ist nur noch die Hälfte vorhanden?

c) Wann ist die Population ausgestorben?

Aufgabe 45

(Lösung auf Seite 25)

Die **Zerfallsrate** einer radioaktiven Substanz wird durch $R(t) = -0{,}212 \cdot 0{,}98^t$ angegeben.

Bestimme die Bestandsfunktion m(t) der Substanz, wenn die Anfangsmenge 10,5 g war.

Aufgabe 46

(Lösung auf Seite 26)

Für jedes $k \neq 0$ und jedes $a > 0$ ist eine Funktion f gegeben durch

$$f(t) = a \cdot e^{kt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) f beschreibe den Kernzerfall bei einem radioaktiven Präparat. Dabei gibt f(t) die Zerfallsgeschwindigkeit (Anzahl der Zerfälle pro Sekunde) zum Zeitpunkt t Sekunden nach Beobachtungsbeginn an. Zu Beginn der Beobachtung werden 1000 Zerfälle pro Sekunde, 30 Sekunden später noch 741 Zerfälle pro Sekunde gemessen.

Berechne a und k auf zwei Dezimalen gerundet. (Ergebnis: $f(t) = 1000 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$).

Innerhalb welcher Zeit nimmt f(t) auf die Hälfte ab?
Es soll nun eine lineare Näherungsfunktion h erstellt werden, die mit f in den Zeitpunkten 0 s und 100 s übereinstimmt. Zeichne das Schaubild C von f und das Schaubild von h für $0 \leq t \leq 150$ in ein gemeinsames Achsenkreuz ein.

(20 Sekunden $\hat{=}$ 1 cm, 100 Zerfälle pro Sekunde $\hat{=}$ 1 cm).
Für welches t mit $0 \leq t \leq 100$ ist die Differenz h(t) – f(t) maximal und wie stark ist die größte Abweichung prozentual?

b) Die Funktion F beschreibe für $t \geq 0$ die Zahl der seit Beobachtungsbeginn zerfallenen Kerne zum Zeitpunkt t (Sekunden). Dabei ist F(0) = 0 und $F'(t) = f(t)$ mit der Funktion f aus Teilaufgabe a). Berechne F(t).
Bestimme den Wertebereich von F.
Wie groß ist demnach die Anzahl der unzerfallenen Kerne bei Zerfallsbeginn?
Skizziere das Schaubild von F.
g sei die Funktion, welche die zur Zeit t vorhandenen Kerne angibt.
Stelle ihre Gleichung auf.
Zeige: F ist Lösung dieser Differentialgleichung: $y' = 0{,}01 \cdot \left(10^5 - y\right)$.

Lösungen der Aufgaben 51 bis 56 im Text 18815

Aufgabe 51 Abkühlungsprozesse

An einem kalten Wintertag stellt Steffi einen frisch gekochten Pudding vor das Fenster zum Abkühlen. Sie hat die Temperatur des Puddings mit einem Thermometer zu 82^{O} C bestimmt. Nach 36 Minuten hat sich der Pudding auf 41^{O} C abgekühlt. (Gehe von exponentieller Temperaturabnahme aus, d.h. eine gegen 0 gehende Abkühlung!)

a) Welche Temperatur hat der Pudding nach einer Stunde vor dem Fenster?

b) Wie lange muss Steffi warten, bis sich der Pudding auf 14^{O} C abgekühlt hat?

c) Die Schokoladensoße stellt Steffi 15 Minuten später als den Pudding vors Fenster. Beim Herausstellen hat diese Soße ebenfalls 82^{O} C. Um das Abkühlen der Soße zu beschleunigen, rührt Steffi immer wieder um und erreicht, dass die Soße schon nach 30 Minuten auf 41^{O} C abgekühlt ist. Wie lange muss die Soße vor dem Fenster stehen, bis Pudding und Soße dieselbe Temperatur haben?

Aufgabe 52

Franzi und Kathrin bereiten einen Kindergeburtstag vor und kochen Vanillepudding mit Schokoladensoße. Bei der Soße wird eine Temperatur von 72^{O} C gemessen,
beim Pudding 85^{O} C.
Wir gehen davon aus, dass der Abkühlungsprozess näherungsweise exponentiell vor sich geht.

Wann sind beide Speisen gleich warm

a) wenn beide Leckereien den Abkühlungsprozess gemeinsam beginnen?

b) wenn der Vanillepudding erst 3 Minuten später fertig ist?

Aufgabe 53 Lichtschwächung in Glas

Wenn Licht durch Glas hindurch geht, nimmt seine Intensität ab.

Eine 1 cm dicke Glasplatte einer bestimmten Glassorte schwächt das Licht dabei um 5 % ab.

a) Um wie viel Prozent nimmt die Intensität ab, wenn es durch 20 cm Glas hindurchgeht?

b) Wie dick ist eine Glasplatte, wenn sie die Lichtintensität auf 25 % reduziert?

c) Anderes Glas der Dicke 8 cm schwächt um 38 % ab. Wie viel bedeutet dies für 1 cm Glas?

Aufgabe 54 Lichtschwächung in Glas

Glas wird auf seine Lichtdurchlässigkeit untersucht.

a) Man bestrahlt zuerst eine Glasplatte der Sorte 1 mit der Lichtstärke 30 Lux und misst hinter einer Dicke von 4 cm noch 21,5 Lux. Stelle die Gleichung für die Abnahme der Lichtintensität auf. Verwende L(x) als Lichtintensität in Lux nach Durchdringen der Dicke x.
Wie groß ist die Intensität nach 3 cm?
Nach welcher theoretischen Glasdicke ist weniger als 1 % vorhanden?

b) Von einer zweiten Glassorte weiß man, dass sie die Halbwertsdicke 16 cm hat.
Welchen Abnahmefaktor q hat die neue Glassorte und welche zahlenmäßige Bedeutung hat dieser Wert q?

c) Für einen Anwendungszweck klebt man zwei verschiedenartige Glasplatten zusammen.
Zuerst nimmt man 3 cm von der Sorte 1 und dann 2 cm einer neuen Sorte 3.
Man stellt fest, dass diese Plattenschicht einen Intensitätsverlust von 30% liefert.
Welchen Abnahmefaktor r hat die neue Glassorte?

Aufgabe 55 Absorption von Licht im Wasser

In der Mitte eines Sees nimmt im Wasser die Helligkeit von Licht pro Meter Wassertiefe um 33 % ab. An der Seeoberfläche zeigt ein Messgerät die Beleuchtungsstärke 3000 Lux an.

a) Wie viel Prozent der Helligkeit der Oberfläche werden in 5 m Wassertiefe noch gemessen?

b) In welcher Tiefe misst man noch 1000 Lux?

c) An einer Randstelle des Sees ist das Wasser weniger klar. Dort ist die Helligkeit bereits in 180 cm Wassertiefe um 76 % kleiner als an der Seeoberfläche.
Um wie viel Prozent schwächt dort 1 m Wassertiefe das Licht ab?

Aufgabe 56 Luftdruckabnahme

An einem bestimmten Tag war der Luftdruck in Meereshöhe p(0) = 1000 Hektopascal.
Erfahrungsgemäß nimmt der Luftdruck um jeweils 5 km auf die Hälfte ab.

a) Bestimme die Gleichung der Barometrischen Höhenformel $p(h) = p(0) \cdot a^h$,
wobei die Höhe h in km gemessen wird.

b) Berechne den Luftdruck, der an diesem Tag auf dem 1500 m hohen Feldberg im Schwarzwald gemessen wird.

c) An einem anderen Tag ist der Luftdruck in Meereshöhe P.
Berechne die Höhe h, in der der Druck auf ein Zehntel von P zurückgegangen ist.

Lösungen

Lösung Nr. 20

Berechne aus der momentanen Wachstumsrate die Bestandsfunktion.

a) Geg.: $R(t)=1{,}584\cdot e^{0{,}0198\cdot t}$ mit $B(0)=80$ bzw. mit $B(0)=40$

$$B(t)=\int 1{,}584\cdot e^{0{,}0198\cdot t}dt=1{,}584\cdot\frac{1}{0{,}0198}\cdot e^{0{,}0198\cdot t}+C=80\cdot e^{0{,}0198\cdot t}+C$$

Wenn $B(0)=80$ gegeben ist, dann folgt durch Einsetzen: $80\cdot e^0+C=80 \Leftrightarrow C=0$

Dann lautet die Bestandsfunktion $B(t)=80\cdot e^{0{,}0198\cdot t}$

Ist $B(0)=40$ gegeben, dann erhält man: $80\cdot e^0+C=40 \Leftrightarrow C=40-80=-40$

Dann lautet die Bestandsfunktion $B(t)=80\cdot e^{0{,}0198\cdot t}-40$

b) Geg.: $R(t)=28\cdot 1{,}04^t$ mit $B(10)=50$

$$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}\cdot a^x+C$$

$$B(t)=\int 28\cdot 1{,}04^t dt=28\cdot\frac{1}{\ln 1{,}04}\cdot 1{,}04^t+C=713{,}9\cdot 1{,}04^t+C$$

$B(0)=713{,}9+C$ ergibt $713{,}9+C=50 \Leftrightarrow C=-663{,}9$

Ergebnis: $B(t)=713{,}9\cdot 1{,}04^t-663{,}9$

c) Geg.: $R(t)=400\cdot e^{0{,}25\cdot t}$ mit $B(0)=200$

$$B(t)=\int 400\cdot e^{0{,}25\cdot t}dt=400\cdot\frac{1}{0{,}25}\cdot e^{0{,}25\cdot t}+C=1600\cdot e^{0{,}25\cdot t}+C$$

$B(0)=1600+C$ ergibt $1600+C=200 \Leftrightarrow C=-1400$

Ergebnis: $B(t)=1600\cdot e^{0{,}25\cdot t}-1400$

d) Geg.: $R(t)=24\cdot 0{,}87^t$ mit $B(2)=20$

$$B(t)=\int 24\cdot 0{,}87^t dt=24\cdot\frac{1}{\ln 0{,}87}\cdot 0{,}87^t+C=-172.3\cdot 0{,}87^t+C$$

$B(2)=-172{,}3\cdot 0{,}87^2+C$ ergibt $-130{,}4+C=20 \Leftrightarrow C=150{,}4$

Ergebnis: $B(t)=-172{,}3\cdot 0{,}87^t+150{,}4$

e) Geg.: $R(t)=2500\cdot e^{-t/2}$ mit $B(20)=1$

$$B(t)=\int 2500\cdot e^{-t/2}dt=2500\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-t/2}+C=-5000\cdot e^{-t/2}+C$$

$B(20)=-5000\cdot e^{-10}+C=-0{,}227+C$ ergibt $-0{,}227+C=1 \Leftrightarrow C=1{,}227$

Ergebnis: $B(t)=-5000\cdot e^{-t/2}+1{,}227$